

*Anatocismo e usura nei contratti bancari  
Profili civilistici alla ricerca di un linguaggio  
comune tra matematica e diritto*

*Marina di Carrara, 29 marzo 2019*

*Antonio Annibali - Carla Barracchini*

*Analisi matematica dei mutui con ammortamento alla  
francese in regime di capitalizzazione composta e in  
capitalizzazione semplice - La produzione esponenziale  
degli interessi quale condizione matematica dell'effetto  
anatocistico*

*Antonio e Alessandro Annibali, Carla Barracchini, Francesco Olivieri  
[www.attuariale.eu](http://www.attuariale.eu)*



# *Metodologie di ammortamento*

---

*La metodologia di ammortamento di un mutuo corrisponde alla regola con la quale si procede al rimborso dell'importo prestato:*

- *mutuo puro (con pagamento periodico degli interessi e rimborso finale della somma prestata)*
- *"all'italiana" (con quote capitali costanti)*
- *"alla francese" (con rate costanti)*
- *"all'americana" (mutuo puro + accumulo della somma prestata, detto anche ammortamento a due tassi)*

*Attualmente la metodologia più frequentemente utilizzata è quella "alla francese", che spesso (in motivazioni di sentenze, consulenze tecniche d'ufficio o di parte) viene immotivatamente comparata con quella "all'italiana".*



# *Regimi finanziari*

---

*Il **regime finanziario** è il principio secondo cui vanno effettuate le valutazioni finanziarie, che sono operativamente effettuate tramite le **leggi finanziarie** (ossia gli **algoritmi**) sottostanti a tale principio.*

*I due regimi finanziari principalmente usati sono:*

- *regime finanziario (detto **esponenziale**) della **capitalizzazione composta (CC)**, nel quale gli interessi precedentemente causa della loro capitalizzazione, sono causa di ulteriori interessi, con **presenza** quindi del fenomeno **anatocistico**,*
- *regime finanziario (detto **lineare/iperbolico**) della **capitalizzazione semplice (CS)**, nel quale gli interessi precedentemente maturati sono soltanto contabilizzati e non generano ulteriori interessi, con **assenza** quindi del fenomeno **anatocistico***



## *Regimi finanziari*

---

*Il regime finanziario della capitalizzazione composta è caratterizzato da leggi finanziarie scindibili*

$$r_{x,y} = r_{x,u} r_{u,y} \quad (1+i)^{y-x} = (1+i)^{u-x} (1+i)^{y-u}$$

*da cui deriva*

$$i_{x,y} = i_{x,u} + i_{u,y} + i_{x,u} i_{u,y}$$

*Il montante unitario finale, relativo all'intero intervallo  $[x,y]$ , non si modifica se, ad un'epoca "intermedia"  $u$ , l'operazione finanziaria di investimento viene interrotta e immediatamente ripresa; l'interesse relativo all'intero intervallo  $[x,y]$  risulta pari all'interesse relativo al primo periodo  $[x,u]$ , calcolato sul capitale iniziale, più l'interesse relativo al secondo periodo  $[u,y]$ , calcolato sul capitale iniziale maggiorato dell'interesse del primo periodo.*



## *Regimi finanziari*

---

*Il regime finanziario della capitalizzazione semplice è caratterizzato da leggi finanziarie additive*

$$i_{x,y} = i_{x,u} + i_{u,y} \quad i(y-x) = i(u-x) + i(y-u)$$

*Partendo dal capitale unitario iniziale, l'interesse relativo all'intero intervallo  $[x,y]$  risulta pari all'interesse relativo al primo periodo  $[x,u]$ , calcolato sul capitale iniziale, più l'interesse relativo al secondo periodo  $[u,y]$ , calcolato sempre sul capitale iniziale.*

*Le proprietà di scindibilità e di additività sono tra loro incompatibili.*



## *Regimi finanziari*

---

*Si consideri un'operazione finanziaria relativa ad un prestito di importo  $C = \text{Euro } 10.000$  da restituire dopo  $n = 5$  anni al tasso annuo effettivo  $i = 10\%$ .*

*L'importo globale che deve essere restituito alla fine del periodo (quinquennale) (rappresentato dal montante dell'importo prestato al tasso stabilito) dipende dal regime finanziario adottato, in base alle cui leggi debbono essere effettuati i calcoli:*

*Regime finanziario della capitalizzazione composta*

$$M = C(1 + i)^n \Rightarrow 16.105,1 = 10.000(1 + 0,10)^5$$

*Regime finanziario della capitalizzazione semplice*

$$M = C(1 + i n) \Rightarrow 15.000 = 10.000(1 + 0,10 \cdot 5)$$



## *Regimi finanziari*

---

*Si supponga che venga deciso che la contabilizzazione degli interessi avvenga alla fine di ogni anno e che*

- alla fine del quinto anno venga restituito l'importo prestato di Euro 10.000 e gli interessi opportunamente capitalizzati*

*oppure, in alternativa (hp.2), che*

- ferma restando la restituzione finale dell'importo prestato, il pagamento degli interessi avvenga annualmente: il problema consiste nel determinare l'importo delle diverse quote interessi, in modo che venga salvaguardata, in ciascuno dei due regime finanziari considerati, l'equità dell'operazione finanziaria*



## Regimi finanziari: CC

*Regime finanziario della capitalizzazione composta (hp.2):*

*le quote interessi*

$$\underbrace{I_t = Ci}_{t=1,\dots,n} \Rightarrow \underbrace{1.000 = 10.000 \cdot 0,10}_{t=1,\dots,5}$$

vengono *pagate* alle diverse scadenze e quindi *impiegate* (dal creditore) al tasso del prestito (ritenuto corrispondente alle condizioni di mercato del prestito stesso). Alla fine del periodo quinquennale il creditore avrà realizzato (e il debitore si sarà privato de) l'importo prestato aumentato degli interessi capitalizzati, ossia il montante precedentemente indicato

$$M = C + I_1 \cdot (1 + i)^{n-1} + I_2 \cdot (1 + i)^{n-2} + \dots + I_{n-1} \cdot (1 + i)^1 + I_n \cdot (1 + i)^0$$





## Regimi finanziari: CC

$$\begin{aligned} & 16.105,1 \\ & = 10.000 + \underbrace{1.000 \cdot 1,1^4}_{1.464,1} + \underbrace{1.000 \cdot 1,1^3}_{1.331} + \underbrace{1.000 \cdot 1,1^2}_{1.210} + \underbrace{1.000 \cdot 1,1}_{1.100} \\ & + 1.000 \end{aligned}$$

dove si vede bene come 1.000 sia il *valore attuale*, rispettivamente ai tempi 1, 2, 3, 4 e 5 delle *quote interessi capitalizzate* in CC e riferite al tempo finale

$$1.000 = \frac{1.464,1}{1,1^4} = \frac{1.331}{1,1^3} = \frac{1.210}{1,1^2} = \frac{1.100}{1,1} = \frac{1.000}{1}$$

## Regimi finanziari: CC

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	<i>Prestito</i>	10,000.00	.	<i>Capitalizzazione composta</i>							
2	<i>Tasso</i>	10%		<i>t</i>	<i>Pag c/cap</i>	<i>Pag c/int</i>	<i>Pagamenti</i>	<i>Int rata</i>	<i>Int finali</i>	$\Sigma$ <i>Int fin</i>	<i>S/ Cap</i>
3	<i>Durata</i>	5		0							10,000.00
4	<i>Caso</i>	1		1	0.00		0.00	1,000.00	1,464.10	1,464.10	10,000.00
5	<i>tempo 1</i>	0.00		2	0.00		0.00	1,000.00	1,331.00	2,795.10	10,000.00
6	<i>tempo 2</i>	0.00		3	0.00		0.00	1,000.00	1,210.00	4,005.10	10,000.00
7	<i>tempo 3</i>	0.00		4	0.00		0.00	1,000.00	1,100.00	5,105.10	10,000.00
8	<i>tempo 4</i>	0.00		5	10,000.00	6,105.10	16,105.10	1,000.00	1,000.00	6,105.10	0.00

	D	E	F	G	H	I	J	K
10	<i>Capitalizzazione composta</i>							
11	<i>t</i>	<i>Pag c/cap</i>	<i>Pag c/int</i>	<i>Pagamenti</i>	<i>Int rata</i>	<i>Int finali</i>	$\Sigma$ <i>Int fin</i>	<i>S/ Cap</i>
12	0							10,000.00
13	1	0.00	1,000.00	1,000.00	0.00	0.00	0.00	10,000.00
14	2	0.00	1,000.00	1,000.00	0.00	0.00	0.00	10,000.00
15	3	0.00	1,000.00	1,000.00	0.00	0.00	0.00	10,000.00
16	4	0.00	1,000.00	1,000.00	0.00	0.00	0.00	10,000.00
17	5	10,000.00	1,000.00	11,000.00	0.00	0.00	0.00	0.00



## *Regimi finanziari: CS*

---

*Regime finanziario della capitalizzazione semplice (hp.2):*

*le quote interessi*

$$\underbrace{I_t = Ci}_{t=1,\dots,n} \Rightarrow \underbrace{1.000 = 10.000 \cdot 0,10}_{t=1,\dots,5}$$

*dovranno essere **contabilizzate** alle varie scadenze, ma essere **infruttifere**. Alla fine del periodo quinquennale il creditore avrà realizzato (e il debitore si sarà privato de) l'importo prestato aumentato del pagamento degli interessi non capitalizzati, ossia il montante precedentemente indicato*

$$M = C + I_1 + I_2 + \dots + I_{n-1} + I_n$$



## Regimi finanziari: CS

$$15.000 = 10.000 + 1.000 + 1.000 + 1.000 + 1.000 + 1.000 =$$
$$10.000 + \underbrace{714,29 \cdot 1,4}_{1.000} + \underbrace{769,23 \cdot 1,3}_{1.000} + \underbrace{833,33 \cdot 1,2}_{1.000} + \underbrace{909,09 \cdot 1,1}_{1.000}$$
$$+ 1.000$$

dove si vede bene come 714,29 , 769,23 , 833,33 , 909,09 , 1.000 siano il **valore attuale in CS**, rispettivamente al tempo 1, 2, 3, 4 e 5 delle quote interessi calcolate in CS e riferite al tempo finale

$$714,29 = \frac{1.000}{1,4} \quad 769,23 = \frac{1.000}{1,3} \quad 833,33 = \frac{1.000}{1,2} \quad 909,09 = \frac{1.000}{1,1}$$

## Regimi finanziari: CS

	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	<i>Capitalizzazione semplice</i>							
2	<i>t</i>	<i>Pagamenti</i>	<i>Pag c/int</i>	<i>Pagamenti</i>	<i>Int rata</i>	<i>Int finali</i>	$\Sigma$ <i>Int fin</i>	<i>S/ Cap</i>
3	0							10,000.00
4	1	0.00		0.00	714.29	1,000.00	1,000.00	10,000.00
5	2	0.00		0.00	769.23	1,000.00	2,000.00	10,000.00
6	3	0.00		0.00	833.33	1,000.00	3,000.00	10,000.00
7	4	0.00		0.00	909.09	1,000.00	4,000.00	10,000.00
8	5	10,000.00	5,000.00	15,000.00	1,000.00	1,000.00	5,000.00	0.00
10	<i>Capitalizzazione semplice</i>							
11	<i>t</i>	<i>Pagamenti</i>	<i>Pag c/int</i>	<i>Pagamenti</i>	<i>Int rata</i>	<i>Int finali</i>	$\Sigma$ <i>Int fin</i>	<i>S/ Cap</i>
12	0							10,000.00
13	1	0.00	714.29	714.29	0.00	0.00	0.00	10,000.00
14	2	0.00	769.23	769.23	0.00	0.00	0.00	10,000.00
15	3	0.00	833.33	833.33	0.00	0.00	0.00	10,000.00
16	4	0.00	909.09	909.09	0.00	0.00	0.00	10,000.00
17	5	10,000.00	1,000.00	11,000.00	0.00	0.00	0.00	0.00



## *Regimi finanziari*

---

*Dall'esame delle precedenti formule e tabelle si può evincere quanto segue:*

*Nel caso di adozione del regime finanziario della **capitalizzazione composta**, gli interessi (calcolati come prodotto tra il debito residuo relativo alla scadenza precedente e il tasso di interesse) vanno **contabilizzati e capitalizzati** (in capitalizzazione composta) sino alla scadenza dell'operazione, generando, unitamente al rimborso del capitale prestato, l'importo finale in CC; in alternativa tali quote interessi possono essere **pagate annualmente** (nella cosiddetta forma di "mutuo puro" in capitalizzazione composta)*



## *Regimi finanziari*

---

*Nel caso di adozione del regime finanziario della **capitalizzazione semplice**, gli interessi (calcolati come prodotto tra il debito residuo relativo alla scadenza precedente e il tasso di interesse) vanno **contabilizzati**, ma **non anche capitalizzati**, sino alla scadenza dell'operazione, generando, unitamente al rimborso del capitale prestato, l'importo finale in CS.*

*In alternativa, tali quote interessi possono essere **pagate annualmente**, in termini **attualizzati** (in capitalizzazione semplice), in modo che la loro capitalizzazione (sempre in CS), generi, unitamente al rimborso del capitale prestato, l'importo finale in CS*



## *Regimi finanziari*

---

*Contrariamente al caso del regime finanziario della capitalizzazione composta (nel quale le quote interessi sono calcolate come prodotto di due fattori:*

*- debito residuo precedente e tasso di interesse),*

*nel caso di adozione del regime finanziario della capitalizzazione semplice, le quote interessi vanno calcolate come prodotto di tre fattori:*

*- debito residuo precedente, tasso di interesse e fattore di attualizzazione,*

*essendo questo un modo indiretto per rendere tali quote interessi "improduttive sino alla scadenza".*





## Affermazioni presenti in sentenze: congetture e teoremi

- Una **congettura** è un'affermazione (**neutra** oppure **logica**) di cui non risulta dimostrata la sua veridicità, nè il suo contrario,
- un **teorema** è una congettura dimostrata.

Come affermato, nel secolo scorso, da un eminente matematico, una **congettura soggiace** a un **teorema** ad essa contrapposto.

- la congettura di **Golbach** "ogni numero pari  $>2$  è sempre uguale alla uguale alla somma di due numeri primi" è una congettura neutra, neutra,
- la congettura "i numeri primi sono infiniti" è stata, prima della dimostrazione di **Euclide**, una congettura logica,
- la congettura "la quota interessi è pari al prodotto del tasso di interesse interesse per il debito residuo relativo al tempo precedente" è una congettura logica, ma, mentre in capitalizzazione composta è composta è anche un **teorema**, in capitalizzazione semplice è una **congettura errata** (notendosi dimostrare il contrario)



## *Evoluzione dello stato dell'arte*

---

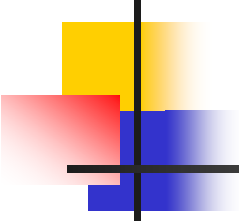
*Formazione di un gruppo di studio Università / Attuari professionisti*

*Recente pubblicazione dell'articolo «Rivisitazione del modello [#] di calcolo dell'ammortamento "alla francese" di un mutuo in CS»: [#] modello proposto in nostri libri di precedente pubblicazione*

*Dimostrazione algebrica degli algoritmi per la stesura del piano di ammortamento "alla francese" (oppure altra metodologia) in CS*

*Formulazione di un modello di calcolo di più facile utilizzazione per la quantificazione del fenomeno anatocistico nei piani stilati in CC*

*Superamento di talune difficoltà interpretative evidenziate da lettori dei libri precedentemente pubblicati e contrasto ad argomentazioni (congetture) avanzate da taluni soggetti per negare la possibilità di stesura di piani in CS e la conseguente*



# Ammortamento di un mutuo “alla francese”

L'ammortamento di un mutuo prevede il **prestito** di una somma a un tempo iniziale e la **restituzione** di una rendita composta da  $n$  rate.

Per assicurare l'equità finanziaria, tale operazione deve verificare la **condizione di chiusura** (azzeramento del debito residuo finale):

- **uguaglianza** tra il debito iniziale e la somma delle quote capitali,
- **equivalenza** tra il debito iniziale e l'insieme delle rate: nel caso di un regime finanziario con **leggi non scindibili** (CS), l'equivalenza (relativa) dovrà essere verificata a un'**epoca assegnata** (**tempo finale**), mentre nel caso di un regime con **leggi scindibili** (CC), tale equivalenza (assoluta) sarà verificata in una **qualsiasi epoca**.

- **Importo prestato:** € 100.000
- **Durata dell'ammortamento :** 20 anni
- **Pagamento delle rate:** annuale
- **Tasso annuo effettivo di interesse:** 5%



# *Piano di ammortamento in CC*

## *Metodo ricorsivo*

---

*Dagli elementi contrattuali e dalla conoscenza della **rata CC** di un piano di ammortamento "alla francese", è possibile calcolare "in forma ricorsiva" le altre grandezze del piano stesso :*

- ***quote interessi:** prodotto di ciascun debito residuo relativo al periodo precedente (anno, semestre, trimestre, bimestre, mese) per il tasso di interesse effettivo periodale,*
- ***quote capitali:** differenza tra ciascuna rata e la quota interessi relativa allo stesso tempo; la somma delle quote capitali, pari al debito iniziale, evidenzia la verifica della condizione di chiusura dell'ammortamento,*
- ***debiti residui:** debito iniziale con sottrazione progressiva delle singole quote capitali, ovvero sottrazione delle singole rate e addizione delle rispettive quote interessi.*



## *Piano di ammortamento in CC*

### *Metodo ricorsivo*

---

$$R = D_0 \frac{r_{\overline{n}|i}}{s_{\overline{n}|i}} = \frac{D_0}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{D_0 i}{1 - (1 + i)^{-n}} \Rightarrow R = \frac{100000 \cdot 0.05}{1 - 1.05^{-20}} = \frac{100000}{12.46221} = 8024.26$$

$$I_k = i D_{k-1}$$

$$C_k = R - I_k$$

$$D_k = D_{k-1} - C_k = D_{k-1} - R + I_k = D_{k-1}(1 + i) - R, \quad D_n = 0$$

# Piano di ammortamento in CC

## Metodo ricorsivo

<i>Tempi</i>	<i>Rata</i>	<i>Interessi</i>	<i>Capitale</i>	<i>Residuo</i>
<i>0</i>				<b>100000.00</b>
<i>1</i>	<b>8024.26</b>	<b>5000.00</b>	<b>3024.26</b>	<b>96975.74</b>

<i>Tempi</i>	<i>Rata</i>	<i>Interessi</i>	<i>Capitale</i>	<i>Residuo</i>
<i>0</i>				<b>100000.00</b>
<i>1</i>	<b>8024.26</b>	<b>5000.00</b>	<b>3024.26</b>	<b>96975.74</b>
<i>2</i>	<b>8024.26</b>	<b>4848.79</b>	<b>3175.47</b>	<b>93800.27</b>

<i>Tempi</i>	<i>Rata</i>	<i>Interessi</i>	<i>Capitale</i>	<i>Residuo</i>
<i>0</i>				<b>100000.00</b>
<i>1</i>	<b>8024.26</b>	<b>5000.00</b>	<b>3024.26</b>	<b>96975.74</b>
<i>2</i>	<b>8024.26</b>	<b>4848.79</b>	<b>3175.47</b>	<b>93800.27</b>
<i>3</i>	<b>8024.26</b>	<b>4690.01</b>	<b>3334.25</b>	<b>90466.02</b>

<i>Tempi</i>	<i>Rata</i>	<i>Interessi</i>	<i>Capitale</i>	<i>Residuo</i>
<i>0</i>				<b>100000.00</b>
<i>1</i>	<b>8024.26</b>	<b>5000.00</b>	<b>3024.26</b>	<b>96975.74</b>
<i>2</i>	<b>8024.26</b>	<b>4848.79</b>	<b>3175.47</b>	<b>93800.27</b>
<i>3</i>	<b>8024.26</b>	<b>4690.01</b>	<b>3334.25</b>	<b>90466.02</b>
<i>4</i>	<b>8024.26</b>	<b>4523.30</b>	<b>3500.96</b>	<b>86965.07</b>

# Piano di ammortamento in CC

## Metodo ricorsivo

<i>Tempi</i>	<i>Rata</i>	<i>Interessi</i>	<i>Capitale</i>	<i>Residuo</i>
<i>0</i>				<i>100000.00</i>
<i>1</i>	<i>8024.26</i>	<i>5000.00</i>	<i>3024.26</i>	<i>96975.74</i>
<i>2</i>	<i>8024.26</i>	<i>4848.79</i>	<i>3175.47</i>	<i>93800.27</i>
<i>3</i>	<i>8024.26</i>	<i>4690.01</i>	<i>3334.25</i>	<i>90466.02</i>
<i>4</i>	<i>8024.26</i>	<i>4523.30</i>	<i>3500.96</i>	<i>86965.07</i>
<i>5</i>	<i>8024.26</i>	<i>4348.25</i>	<i>3676.01</i>	<i>83289.06</i>
<i>6</i>	<i>8024.26</i>	<i>4164.45</i>	<i>3859.81</i>	<i>79429.26</i>
<i>7</i>	<i>8024.26</i>	<i>3971.46</i>	<i>4052.80</i>	<i>75376.46</i>
<i>8</i>	<i>8024.26</i>	<i>3768.82</i>	<i>4255.44</i>	<i>71121.02</i>
<i>9</i>	<i>8024.26</i>	<i>3556.05</i>	<i>4468.21</i>	<i>66652.82</i>
<i>10</i>	<i>8024.26</i>	<i>3332.64</i>	<i>4691.62</i>	<i>61961.20</i>
<i>11</i>	<i>8024.26</i>	<i>3098.06</i>	<i>4926.20</i>	<i>57035.00</i>
<i>12</i>	<i>8024.26</i>	<i>2851.75</i>	<i>5172.51</i>	<i>51862.49</i>
<i>13</i>	<i>8024.26</i>	<i>2593.12</i>	<i>5431.13</i>	<i>46431.36</i>
<i>14</i>	<i>8024.26</i>	<i>2321.57</i>	<i>5702.69</i>	<i>40728.67</i>
<i>15</i>	<i>8024.26</i>	<i>2036.43</i>	<i>5987.83</i>	<i>34740.84</i>
<i>16</i>	<i>8024.26</i>	<i>1737.04</i>	<i>6287.22</i>	<i>28453.62</i>
<i>17</i>	<i>8024.26</i>	<i>1422.68</i>	<i>6601.58</i>	<i>21852.05</i>
<i>18</i>	<i>8024.26</i>	<i>1092.60</i>	<i>6931.66</i>	<i>14920.39</i>
<i>19</i>	<i>8024.26</i>	<i>746.02</i>	<i>7278.24</i>	<i>7642.15</i>
<i>20</i>	<i>8024.26</i>	<i>382.11</i>	<i>7642.15</i>	<i>0.00</i>
<i>Tot</i>	<i>160485.17</i>	<i>60485.17</i>	<i>100000.00</i>	
<i>V.A.</i>	<i>100000.00</i>	<i>42395.07</i>	<i>57604.93</i>	
<i>Mont</i>	<i>265329.77</i>	<i>112486.75</i>	<i>152843.02</i>	



## *Piano di ammortamento in CC*

### *Metodo diretto*

---

*Dagli elementi contrattuali e dalla conoscenza della **rata CC** di un piano di ammortamento "alla francese", è possibile calcolare anche "in forma diretta" le altre grandezze del piano stesso :*

- **debiti residui**: somme dei valori attuali delle rate di ammortamento successive al tempo di valutazione,*
- **quote capitali**: differenze tra ciascun debito residuo relativo al tempo precedente e l'analogo debito residuo del tempo corrente,*
- **quote interessi**: differenze tra ciascuna rata di ammortamento e la quota capitale relativa al tempo corrente; operando in tale modo, le quote interessi non derivano, come accadeva nel precedente metodo ricorsivo, da una posizione (**congettura**), ma da una dimostrazione algebrica (**teorema**), risultando comunque pari al prodotto di ciascun debito residuo relativo al periodo precedente per il tasso di interesse effettivo periodale.*



# Piano di ammortamento in CC

## Metodo diretto

$$R = D_0 \frac{r_{\overline{n}|i}}{s_{\overline{n}|i}} = \frac{D_0}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{D_0 i}{1 - (1+i)^{-n}} \Rightarrow R = \frac{100000 \cdot 0.05}{1 - 1.05^{-20}} = \frac{100000}{12.46221} = 8024.26$$

$$D_k = R a_{\overline{n-k}|i} = R \frac{1 - v_{\overline{n-k}|i}}{i} = R \frac{1 - (1+i)^{-n+k}}{i}$$

$$C_k = D_{k-1} - D_k = R(a_{\overline{n-k+1}|i} - a_{\overline{n-k}|i}) = \frac{R}{i}(v_{\overline{n-k}|i} - v_{\overline{n-k+1}|i}) = Rv_{\overline{n-k+1}|i}$$

$$C_1 = R(1+i)^{-n}, \quad C_k = C_{k-1}(1+i) = \begin{cases} C_1(1+i)^{k-1} \\ R(1+i)^{-n+k-1} \end{cases}, \quad C_n = R(1+i)^{-1}$$

$$I_k = R - C_k = R(1 - (1+i)^{-n+k-1}) = i R a_{\overline{n-k+1}|i} = i D_{k-1}$$

# *Piano di ammortamento in CC*

## *Metodo diretto*

<i>Tempi</i>	<i>Rata</i>	<i>Interessi</i>	<i>Capitale</i>	<i>Residuo</i>
<i>0</i>				<i>100000.00</i>
<i>1</i>	<i>8024.26</i>			<i>96975.74</i>
<i>2</i>	<i>8024.26</i>			<i>93800.27</i>
<i>3</i>	<i>8024.26</i>			<i>90466.02</i>
<i>4</i>	<i>8024.26</i>			<i>86965.07</i>
<i>5</i>	<i>8024.26</i>			<i>83289.06</i>
<i>6</i>	<i>8024.26</i>			<i>79429.26</i>
<i>7</i>	<i>8024.26</i>			<i>75376.46</i>
<i>8</i>	<i>8024.26</i>			<i>71121.02</i>
<i>9</i>	<i>8024.26</i>			<i>66652.82</i>
<i>10</i>	<i>8024.26</i>			<i>61961.20</i>
<i>11</i>	<i>8024.26</i>			<i>57035.00</i>
<i>12</i>	<i>8024.26</i>			<i>51862.49</i>
<i>13</i>	<i>8024.26</i>			<i>46431.36</i>
<i>14</i>	<i>8024.26</i>			<i>40728.67</i>
<i>15</i>	<i>8024.26</i>			<i>34740.84</i>
<i>16</i>	<i>8024.26</i>			<i>28453.62</i>
<i>17</i>	<i>8024.26</i>			<i>21852.05</i>
<i>18</i>	<i>8024.26</i>			<i>14920.39</i>
<i>19</i>	<i>8024.26</i>			<i>7642.15</i>
<i>20</i>	<i>8024.26</i>			<i>0.00</i>

## *Piano di ammortamento in CC*

### *Metodo diretto*

<i>Tempi</i>	<i>Rata</i>	<i>Interessi</i>	<i>Capitale</i>	<i>Residuo</i>
<i>0</i>				<i>100000.00</i>
<i>1</i>	<i>8024.26</i>		<i>3024.26</i>	<i>96975.74</i>
<i>2</i>	<i>8024.26</i>		<i>3175.47</i>	<i>93800.27</i>
<i>3</i>	<i>8024.26</i>		<i>3334.25</i>	<i>90466.02</i>
<i>4</i>	<i>8024.26</i>		<i>3500.96</i>	<i>86965.07</i>
<i>5</i>	<i>8024.26</i>		<i>3676.01</i>	<i>83289.06</i>
<i>6</i>	<i>8024.26</i>		<i>3859.81</i>	<i>79429.26</i>
<i>7</i>	<i>8024.26</i>		<i>4052.80</i>	<i>75376.46</i>
<i>8</i>	<i>8024.26</i>		<i>4255.44</i>	<i>71121.02</i>
<i>9</i>	<i>8024.26</i>		<i>4468.21</i>	<i>66652.82</i>
<i>10</i>	<i>8024.26</i>		<i>4691.62</i>	<i>61961.20</i>
<i>11</i>	<i>8024.26</i>		<i>4926.20</i>	<i>57035.00</i>
<i>12</i>	<i>8024.26</i>		<i>5172.51</i>	<i>51862.49</i>
<i>13</i>	<i>8024.26</i>		<i>5431.13</i>	<i>46431.36</i>
<i>14</i>	<i>8024.26</i>		<i>5702.69</i>	<i>40728.67</i>
<i>15</i>	<i>8024.26</i>		<i>5987.83</i>	<i>34740.84</i>
<i>16</i>	<i>8024.26</i>		<i>6287.22</i>	<i>28453.62</i>
<i>17</i>	<i>8024.26</i>		<i>6601.58</i>	<i>21852.05</i>
<i>18</i>	<i>8024.26</i>		<i>6931.66</i>	<i>14920.39</i>
<i>19</i>	<i>8024.26</i>		<i>7278.24</i>	<i>7642.15</i>
<i>20</i>	<i>8024.26</i>		<i>7642.15</i>	<i>0.00</i>

# Piano di ammortamento in CC

## Metodo diretto

<i>Tempi</i>	<i>Rata</i>	<i>Interessi</i>	<i>Capitale</i>	<i>Residuo</i>
<i>0</i>				<i>100000.00</i>
<i>1</i>	<i>8024.26</i>	<i>5000.00</i>	<i>3024.26</i>	<i>96975.74</i>
<i>2</i>	<i>8024.26</i>	<i>4848.79</i>	<i>3175.47</i>	<i>93800.27</i>
<i>3</i>	<i>8024.26</i>	<i>4690.01</i>	<i>3334.25</i>	<i>90466.02</i>
<i>4</i>	<i>8024.26</i>	<i>4523.30</i>	<i>3500.96</i>	<i>86965.07</i>
<i>5</i>	<i>8024.26</i>	<i>4348.25</i>	<i>3676.01</i>	<i>83289.06</i>
<i>6</i>	<i>8024.26</i>	<i>4164.45</i>	<i>3859.81</i>	<i>79429.26</i>
<i>7</i>	<i>8024.26</i>	<i>3971.46</i>	<i>4052.80</i>	<i>75376.46</i>
<i>8</i>	<i>8024.26</i>	<i>3768.82</i>	<i>4255.44</i>	<i>71121.02</i>
<i>9</i>	<i>8024.26</i>	<i>3556.05</i>	<i>4468.21</i>	<i>66652.82</i>
<i>10</i>	<i>8024.26</i>	<i>3332.64</i>	<i>4691.62</i>	<i>61961.20</i>
<i>11</i>	<i>8024.26</i>	<i>3098.06</i>	<i>4926.20</i>	<i>57035.00</i>
<i>12</i>	<i>8024.26</i>	<i>2851.75</i>	<i>5172.51</i>	<i>51862.49</i>
<i>13</i>	<i>8024.26</i>	<i>2593.12</i>	<i>5431.13</i>	<i>46431.36</i>
<i>14</i>	<i>8024.26</i>	<i>2321.57</i>	<i>5702.69</i>	<i>40728.67</i>
<i>15</i>	<i>8024.26</i>	<i>2036.43</i>	<i>5987.83</i>	<i>34740.84</i>
<i>16</i>	<i>8024.26</i>	<i>1737.04</i>	<i>6287.22</i>	<i>28453.62</i>
<i>17</i>	<i>8024.26</i>	<i>1422.68</i>	<i>6601.58</i>	<i>21852.05</i>
<i>18</i>	<i>8024.26</i>	<i>1092.60</i>	<i>6931.66</i>	<i>14920.39</i>
<i>19</i>	<i>8024.26</i>	<i>746.02</i>	<i>7278.24</i>	<i>7642.15</i>
<i>20</i>	<i>8024.26</i>	<i>382.11</i>	<i>7642.15</i>	<i>0.00</i>
<i>Tot</i>	<i>160485.17</i>	<i>60485.17</i>	<i>100000.00</i>	
<i>V.A.</i>	<i>100000.00</i>	<i>42395.07</i>	<i>57604.93</i>	
<i>Mont</i>	<i>265329.77</i>	<i>112486.75</i>	<i>152843.02</i>	



# *Piano di ammortamento in CS*

## *Metodo diretto*

---

*Analogamente a quanto effettuato con riferimento al piano in CC, dagli elementi contrattuali e dalla conoscenza della **rata CS** di un piano di ammortamento "alla francese", è possibile calcolare "in forma diretta" le altre grandezze del piano stesso :*

- **debiti residui**: somme dei valori attuali (**v.a. di montanti in CS**) delle rate di ammortamento successive al tempo di valutazione,*
- **quote capitali**: differenze tra ciascun debito residuo relativo al tempo precedente e l'analogo debito residuo del tempo corrente,*
- **quote interessi**: differenze tra ciascuna rata di ammortamento e la quota capitale relativa al tempo corrente; operando in tale modo, nel seguito si verificherà come le quote interessi risultino, tramite una dimostrazione algebrica (**teorema**), pari **al valore attuale** del prodotto di ciascun debito residuo relativo*

# Piano di ammortamento in CS

## Metodo diretto

$$R^{cs} = D_0 \frac{r_{\frac{cs}{n|i}}}{s_{\frac{cs}{n|i}}} = \frac{D_0}{a_{\frac{cs(n)}{n|i}}} = \frac{D_0 (1 + in)}{n \left(1 + i \frac{n-1}{2}\right)} \Rightarrow R^{cs} = \frac{100000(1 + 0.05 \cdot 20)}{20(1 + 0.05 \cdot 9.5)} = \frac{100000}{14.75} = 6779.66$$

$$D_k^{cs} = R^{cs} a_{\frac{cs(n-k)}{n-k|i}} = R^{cs} s_{\frac{cs}{n-k|i}} v_{\frac{cs}{n-k|i}} = R^{cs} \frac{(n-k)r_{\frac{(n-k-1)/2|i}}{1+i(n-k)}} = R^{cs} \frac{(n-k) \left(1 + i \frac{n-k-1}{2}\right)}{1+i(n-k)}$$

$$C_k^{cs} = D_{k-1}^{cs} - D_k^{cs} = R^{cs} \left( a_{\frac{cs(n-k+1)}{n-k+1|i}} - a_{\frac{cs(n-k)}{n-k|i}} \right) = R^{cs} \left( s_{\frac{cs}{n-k+1|i}} v_{\frac{cs}{n-k+1|i}} - s_{\frac{cs}{n-k|i}} v_{\frac{cs}{n-k|i}} \right) =$$

$$= R^{cs} \left( s_{\frac{cs}{n-k+1|i}} v_{\frac{cs}{n-k+1|i}} - (s_{\frac{cs}{n-k+1|i}} - r_{\frac{cs}{n-k|i}}) v_{\frac{cs}{n-k|i}} \right) =$$

$$= R^{cs} \left( s_{\frac{cs}{n-k+1|i}} (v_{\frac{cs}{n-k+1|i}} - v_{\frac{cs}{n-k|i}}) + 1 \right) = R^{cs} \left( 1 - s_{\frac{cs}{n-k+1|i}} i v_{\frac{cs}{n-k+1|i}} v_{\frac{cs}{n-k|i}} \right) =$$

$$= R^{cs} \left( 1 - i a_{\frac{cs(n-k+1)}{n-k+1|i}} v_{\frac{cs}{n-k|i}} \right) = R^{cs} - i D_{k-1}^{cs} v_{\frac{cs}{n-k|i}}$$

$$I_k^{cs} = R^{cs} - C_k^{cs} = R^{cs} - \left( R^{cs} - i D_{k-1}^{cs} v_{\frac{cs}{n-k|i}} \right) = i D_{k-1}^{cs} v_{\frac{cs}{n-k|i}}$$

# *Piano di ammortamento in CS*

## *Metodo diretto*

<i>Tempi</i>	<i>Rata</i>	<i>Interessi</i>	<i>Capitale</i>	<i>Residuo</i>
<i>0</i>				<i>100000.00</i>
<i>1</i>	<i>6779.66</i>			<i>95784.44</i>
<i>2</i>	<i>6779.66</i>			<i>91525.42</i>
<i>3</i>	<i>6779.66</i>			<i>87219.42</i>
<i>4</i>	<i>6779.66</i>			<i>82862.52</i>
<i>5</i>	<i>6779.66</i>			<i>78450.36</i>
<i>6</i>	<i>6779.66</i>			<i>73978.07</i>
<i>7</i>	<i>6779.66</i>			<i>69440.16</i>
<i>8</i>	<i>6779.66</i>			<i>64830.51</i>
<i>9</i>	<i>6779.66</i>			<i>60142.15</i>
<i>10</i>	<i>6779.66</i>			<i>55367.23</i>
<i>11</i>	<i>6779.66</i>			<i>50496.79</i>
<i>12</i>	<i>6779.66</i>			<i>45520.58</i>
<i>13</i>	<i>6779.66</i>			<i>40426.87</i>
<i>14</i>	<i>6779.66</i>			<i>35202.09</i>
<i>15</i>	<i>6779.66</i>			<i>29830.51</i>
<i>16</i>	<i>6779.66</i>			<i>24293.79</i>
<i>17</i>	<i>6779.66</i>			<i>18570.38</i>
<i>18</i>	<i>6779.66</i>			<i>12634.82</i>
<i>19</i>	<i>6779.66</i>			<i>6456.82</i>
<i>20</i>	<i>6779.66</i>			<i>0.00</i>

# *Piano di ammortamento in CS*

## *Metodo diretto*

<i>Tempi</i>	<i>Rata</i>	<i>Interessi</i>	<i>Capitale</i>	<i>Residuo</i>
<i>0</i>				<i>100000.00</i>
<i>1</i>	<i>6779.66</i>		<i>4215.56</i>	<i>95784.44</i>
<i>2</i>	<i>6779.66</i>		<i>4259.02</i>	<i>91525.42</i>
<i>3</i>	<i>6779.66</i>		<i>4306.00</i>	<i>87219.42</i>
<i>4</i>	<i>6779.66</i>		<i>4356.90</i>	<i>82862.52</i>
<i>5</i>	<i>6779.66</i>		<i>4412.16</i>	<i>78450.36</i>
<i>6</i>	<i>6779.66</i>		<i>4472.30</i>	<i>73978.07</i>
<i>7</i>	<i>6779.66</i>		<i>4537.90</i>	<i>69440.16</i>
<i>8</i>	<i>6779.66</i>		<i>4609.66</i>	<i>64830.51</i>
<i>9</i>	<i>6779.66</i>		<i>4688.35</i>	<i>60142.15</i>
<i>10</i>	<i>6779.66</i>		<i>4774.92</i>	<i>55367.23</i>
<i>11</i>	<i>6779.66</i>		<i>4870.45</i>	<i>50496.79</i>
<i>12</i>	<i>6779.66</i>		<i>4976.20</i>	<i>45520.58</i>
<i>13</i>	<i>6779.66</i>		<i>5093.71</i>	<i>40426.87</i>
<i>14</i>	<i>6779.66</i>		<i>5224.78</i>	<i>35202.09</i>
<i>15</i>	<i>6779.66</i>		<i>5371.58</i>	<i>29830.51</i>
<i>16</i>	<i>6779.66</i>		<i>5536.72</i>	<i>24293.79</i>
<i>17</i>	<i>6779.66</i>		<i>5723.41</i>	<i>18570.38</i>
<i>18</i>	<i>6779.66</i>		<i>5935.55</i>	<i>12634.82</i>
<i>19</i>	<i>6779.66</i>		<i>6178.00</i>	<i>6456.82</i>
<i>20</i>	<i>6779.66</i>		<i>6456.82</i>	<i>0.00</i>



# Piano di ammortamento in CS

## Metodo diretto

<i>Tempi</i>	<i>Rata</i>	<i>Interessi</i>	<i>Capitale</i>	<i>Residuo</i>
<i>0</i>				<i>100000.00</i>
<i>1</i>	<i>6779.66</i>	<i>2564.10</i>	<i>4215.56</i>	<i>95784.44</i>
<i>2</i>	<i>6779.66</i>	<i>2520.64</i>	<i>4259.02</i>	<i>91525.42</i>
<i>3</i>	<i>6779.66</i>	<i>2473.66</i>	<i>4306.00</i>	<i>87219.42</i>
<i>4</i>	<i>6779.66</i>	<i>2422.76</i>	<i>4356.90</i>	<i>82862.52</i>
<i>5</i>	<i>6779.66</i>	<i>2367.50</i>	<i>4412.16</i>	<i>78450.36</i>
<i>6</i>	<i>6779.66</i>	<i>2307.36</i>	<i>4472.30</i>	<i>73978.07</i>
<i>7</i>	<i>6779.66</i>	<i>2241.76</i>	<i>4537.90</i>	<i>69440.16</i>
<i>8</i>	<i>6779.66</i>	<i>2170.01</i>	<i>4609.66</i>	<i>64830.51</i>
<i>9</i>	<i>6779.66</i>	<i>2091.31</i>	<i>4688.35</i>	<i>60142.15</i>
<i>10</i>	<i>6779.66</i>	<i>2004.74</i>	<i>4774.92</i>	<i>55367.23</i>
<i>11</i>	<i>6779.66</i>	<i>1909.21</i>	<i>4870.45</i>	<i>50496.79</i>
<i>12</i>	<i>6779.66</i>	<i>1803.46</i>	<i>4976.20</i>	<i>45520.58</i>
<i>13</i>	<i>6779.66</i>	<i>1685.95</i>	<i>5093.71</i>	<i>40426.87</i>
<i>14</i>	<i>6779.66</i>	<i>1554.88</i>	<i>5224.78</i>	<i>35202.09</i>
<i>15</i>	<i>6779.66</i>	<i>1408.08</i>	<i>5371.58</i>	<i>29830.51</i>
<i>16</i>	<i>6779.66</i>	<i>1242.94</i>	<i>5536.72</i>	<i>24293.79</i>
<i>17</i>	<i>6779.66</i>	<i>1056.25</i>	<i>5723.41</i>	<i>18570.38</i>
<i>18</i>	<i>6779.66</i>	<i>844.11</i>	<i>5935.55</i>	<i>12634.82</i>
<i>19</i>	<i>6779.66</i>	<i>601.66</i>	<i>6178.00</i>	<i>6456.82</i>
<i>20</i>	<i>6779.66</i>	<i>322.84</i>	<i>6456.82</i>	<i>0.00</i>
<i>Tot</i>	<i>135593.22</i>	<i>35593.22</i>	<i>100000.00</i>	
<i>V.A.</i>	<i>100000.00</i>	<i>28075.82</i>	<i>71924.18</i>	
<i>Mont</i>	<i>200000.00</i>	<i>56151.65</i>	<i>143848.35</i>	



## *Piano di ammortamento in CS*

### *Metodo ricorsivo*

---

*Analogamente a quanto effettuato con riferimento al piano in CC, dagli elementi contrattuali e dalla conoscenza della **rata CS** di un piano di ammortamento "alla francese", è possibile calcolare anche "in forma ricorsiva" le altre grandezze del piano stesso :*

- **quote interessi:** valore attuale (CS) del prodotto di ciascun debito residuo relativo al periodo precedente (anno, semestre, trimestre, bimestre, mese) per il tasso di interesse effettivo periodale,*
- **quote capitali:** differenza tra ciascuna rata e la quota interessi relativa allo stesso tempo; la somma delle quote capitali, pari al debito iniziale, evidenzia la verifica della condizione di chiusura dell'ammortamento,*
- **debiti residui:** debito iniziale con sottrazione progressiva delle singole quote capitali, ovvero sottrazione delle singole rate e addizione delle rispettive quote interessi.*

# Piano di ammortamento in CS

## Metodo ricorsivo

$$R^{cs} = D_0 \frac{r_{\frac{cs}{n|i}}}{s_{\frac{cs}{n|i}}} = \frac{D_0}{a_{\frac{cs(n)}{n|i}}} = \frac{D_0 (1 + in)}{n \left(1 + i \frac{n-1}{2}\right)} \Rightarrow R^{cs} = \frac{100000(1 + 0.05 \cdot 20)}{20(1 + 0.05 \cdot 9.5)} = \frac{100000}{14.75} = 6779.66$$

$$I_k^{cs} = iD_{k-1}^{cs} v_{\frac{cs}{n-k|i}}$$

$$C_k^{cs} = R^{cs} - I_k^{cs}$$

$$D_k^{cs} = D_{k-1}^{cs} - C_k^{cs} = D_{k-1}^{cs} - R^{cs} + I_k^{cs} = D_{k-1}^{cs} \left(1 + i v_{\frac{cs}{n-k|i}}\right) - R^{cs}$$

,  $D_n^{cs} = 0$

# Piano di ammortamento in CS

## Metodo ricorsivo

<i>Tempi</i>	<i>Rata</i>	<i>Interessi</i>	<i>Capitale</i>	<i>Residuo</i>	<i>Int globali</i>	<i>Coeff Attua</i>
<i>0</i>				<i>100000.00</i>		
<i>1</i>	<i>6779.66</i>	<i>2564.10</i>	<i>4215.56</i>	<i>95784.44</i>	<i>5000.00</i>	<i>0.512821</i>

<i>Tempi</i>	<i>Rata</i>	<i>Interessi</i>	<i>Capitale</i>	<i>Residuo</i>	<i>Int globali</i>	<i>Coeff Attua</i>
<i>0</i>				<i>100000.00</i>		
<i>1</i>	<i>6779.66</i>	<i>2564.10</i>	<i>4215.56</i>	<i>95784.44</i>	<i>5000.00</i>	<i>0.512821</i>
<i>2</i>	<i>6779.66</i>	<i>2520.64</i>	<i>4259.02</i>	<i>91525.42</i>	<i>4789.22</i>	<i>0.526316</i>

<i>Tempi</i>	<i>Rata</i>	<i>Interessi</i>	<i>Capitale</i>	<i>Residuo</i>	<i>Int globali</i>	<i>Coeff Attua</i>
<i>0</i>				<i>100000.00</i>		
<i>1</i>	<i>6779.66</i>	<i>2564.10</i>	<i>4215.56</i>	<i>95784.44</i>	<i>5000.00</i>	<i>0.512821</i>
<i>2</i>	<i>6779.66</i>	<i>2520.64</i>	<i>4259.02</i>	<i>91525.42</i>	<i>4789.22</i>	<i>0.526316</i>
<i>3</i>	<i>6779.66</i>	<i>2473.66</i>	<i>4306.00</i>	<i>87219.42</i>	<i>4576.27</i>	<i>0.540541</i>

<i>Tempi</i>	<i>Rata</i>	<i>Interessi</i>	<i>Capitale</i>	<i>Residuo</i>	<i>Int globali</i>	<i>Coeff Attua</i>
<i>0</i>				<i>100000.00</i>		
<i>1</i>	<i>6779.66</i>	<i>2564.10</i>	<i>4215.56</i>	<i>95784.44</i>	<i>5000.00</i>	<i>0.512821</i>
<i>2</i>	<i>6779.66</i>	<i>2520.64</i>	<i>4259.02</i>	<i>91525.42</i>	<i>4789.22</i>	<i>0.526316</i>
<i>3</i>	<i>6779.66</i>	<i>2473.66</i>	<i>4306.00</i>	<i>87219.42</i>	<i>4576.27</i>	<i>0.540541</i>
<i>4</i>	<i>6779.66</i>	<i>2422.76</i>	<i>4356.90</i>	<i>82862.52</i>	<i>4360.97</i>	<i>0.555556</i>

# Piano di ammortamento in CS

## Metodo ricorsivo

<i>Tempi</i>	<i>Rata</i>	<i>Interessi</i>	<i>Capitale</i>	<i>Residuo</i>	<i>Int globali</i>	<i>Coeff Attua</i>
0				100000.00		
1	6779.66	2564.10	4215.56	95784.44	5000.00	0.512821
2	6779.66	2520.64	4259.02	91525.42	4789.22	0.526316
3	6779.66	2473.66	4306.00	87219.42	4576.27	0.540541
4	6779.66	2422.76	4356.90	82862.52	4360.97	0.555556
5	6779.66	2367.50	4412.16	78450.36	4143.13	0.571429
6	6779.66	2307.36	4472.30	73978.07	3922.52	0.588235
7	6779.66	2241.76	4537.90	69440.16	3698.90	0.606061
8	6779.66	2170.01	4609.66	64830.51	3472.01	0.625000
9	6779.66	2091.31	4688.35	60142.15	3241.53	0.645161
10	6779.66	2004.74	4774.92	55367.23	3007.11	0.666667
11	6779.66	1909.21	4870.45	50496.79	2768.36	0.689655
12	6779.66	1803.46	4976.20	45520.58	2524.84	0.714286
13	6779.66	1685.95	5093.71	40426.87	2276.03	0.740741
14	6779.66	1554.88	5224.78	35202.09	2021.34	0.769231
15	6779.66	1408.08	5371.58	29830.51	1760.10	0.800000
16	6779.66	1242.94	5536.72	24293.79	1491.53	0.833333
17	6779.66	1056.25	5723.41	18570.38	1214.69	0.869565
18	6779.66	844.11	5935.55	12634.82	928.52	0.909091
19	6779.66	601.66	6178.00	6456.82	631.74	0.952381
20	6779.66	322.84	6456.82	0.00	322.84	1.000000
<b>Tot</b>	<b>135593.22</b>	<b>35593.22</b>	<b>100000.00</b>		<b>56151.65</b>	
<b>V.A.</b>	<b>100000.00</b>	<b>28075.82</b>	<b>71924.18</b>		<b>45460.62</b>	
<b>Mont</b>	<b>200000.00</b>	<b>56151.65</b>	<b>143848.35</b>		<b>90921.23</b>	



## *Piano di ammortamento in CC e CS*

### *Metodo ricorsivo - Confronto*

---

$$R = \frac{D_0 i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

$$R^{cs} = \frac{D_0 (1 + in)}{n \left(1 + i \frac{n-1}{2}\right)}$$

$$I_k = i D_{k-1}$$

$$I_k^{cs} = \frac{i D_{k-1}^{cs}}{1 + i(n-k)}$$

$$C_k = R - I_k$$

$$C_k^{cs} = R^{cs} - I_k^{cs}$$

$$D_k = D_{k-1}(1 + i) - R$$

$$D_k^{cs} = D_{k-1}^{cs} \left(1 + \frac{i}{1 + i(n-k)}\right) - R^{cs}$$



# *Piano di ammortamento in CC e CS*

## *Metodo ricorsivo - Confronto*

---

*Le differenze tra i due piani di ammortamento (in CC e in CS), a parte l'utilizzazione delle formule relative ai due regimi, riguardano :*

- l'epoca di verifica dell'equità dell'operazione finanziaria: il tempo iniziale o quello finale (o qualsiasi altro), nel caso di adozione del regime finanziario della CC, e necessariamente il tempo finale  $n$ , nel caso di adozione del regime finanziario della CS,*
- il calcolo in CS delle quote interesse in forma anticipata (valore attuale per il tempo intercorrente tra l'epoca di pagamento e il tempo finale). Mentre in CC, il pagamento dell'intera quota interessi al tempo di scadenza della rata, equivale a pagare il suo montante al tempo finale (generando il calcolo di interessi su interessi), nel caso di CS, il pagamento della quota interessi in forma anticipata al tempo di scadenza della rata, equivale a pagare l'intera quota interessi (che ne è il suo montante) al tempo finale.*





## *Piano di ammortamento in CS Metodo ricorsivo (Rata CC)*

*Volendo calcolare quale tasso d'interesse consente di stilare il piano in CS, considerando come rata di ammortamento quella definita per la stesura del piano in CC (calcolando, in altri termini, il tasso interno in CS dell'operazione realizzata in CC) è sufficiente risolvere la seguente equazione nell'incognita  $i_1$  (la differenza tra tale tasso e quello contrattuale fornisce una misura del fenomeno anatocistico)*

$$D_0 = Ra_{\frac{n|i_1}{}^{CS}} \Rightarrow D_0 r_{\frac{n|i_1}{}^{CS}} = Rs_{\frac{n|i_1}{}^{CS}} \Rightarrow D_0 (1 + i_1 n) = Rn \left(1 + i_1 \frac{n-1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i_1 n \left(D_0 - R \frac{n-1}{2}\right) = Rn - D_0 \Rightarrow i_1 = \frac{R - \frac{D_0}{n}}{D_0 - R \frac{n-1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i_1 = \frac{8024.26 - 5000}{100000 - 8024.26 \cdot 9.5} = 12.723252\%$$



# Piano di ammortamento in CS

## Metodo ricorsivo (Rata CC, $i=12,723\%$ )

Tempi	Rata	Interessi	Capitale	Residuo	Int globali	Coeff Attua
0				100000.00		
1	8024.26	3723.06	4301.20	95698.80	12723.25	0.292619
2	8024.26	3700.70	4323.56	91375.25	12176.00	0.303934
3	8024.26	3675.65	4348.61	87026.64	11625.90	0.316160
4	8024.26	3647.44	4376.82	82649.82	11072.62	0.329411
5	8024.26	3615.54	4408.72	78241.10	10515.74	0.343821
6	8024.26	3579.25	4445.01	73796.09	9954.81	0.359550
7	8024.26	3537.75	4486.51	69309.58	9389.26	0.376787
8	8024.26	3489.97	4534.28	64775.30	8818.43	0.395759
9	8024.26	3434.60	4589.66	60185.64	8241.52	0.416743
10	8024.26	3369.93	4654.33	55531.31	7657.57	0.440078
11	8024.26	3293.74	4730.51	50800.79	7065.39	0.466180
12	8024.26	3203.15	4821.11	45979.69	6463.51	0.495574
13	8024.26	3094.27	4929.99	41049.70	5850.11	0.528925
14	8024.26	2961.82	5062.44	35987.26	5222.86	0.567088
15	8024.26	2798.47	5225.79	30761.47	4578.75	0.611186
16	8024.26	2593.80	5430.46	25331.00	3913.86	0.662721
17	8024.26	2332.59	5691.67	19639.33	3222.93	0.723747
18	8024.26	1991.89	6032.36	13606.97	2498.76	0.797153
19	8024.26	1535.84	6488.42	7118.55	1731.25	0.887128
20	8024.26	905.71	7118.55	0.00	905.71	1.000000
Tot	160485.17	60485.17	100000.00		143628.24	
V.A.	100000.00	40519.72	59480.28		104069.06	
Mont	354465.04	143628.24	210836.79		368888.44	

# Piano di ammortamento in CC e CS “all’italiana” e “alla francese”

Il piano di ammortamento in CS può essere stilato anche nel caso di diverse metodologie di ammortamento (esempio “all’italiana” )

Tempi	Rata	Inter	Capit	Residuo	Tempi	Rata	Inter	Capit	Residuo	Inter	Coeff
0				1000.00	0				1000.00		
1	350.00	100.00	250.00	750.00	1	326.92	76.92	250.00	750.00	100.00	0.769231
2	325.00	75.00	250.00	500.00	2	312.50	62.50	250.00	500.00	75.00	0.833333
3	300.00	50.00	250.00	250.00	3	295.45	45.45	250.00	250.00	50.00	0.909091
4	275.00	25.00	250.00	0.00	4	275.00	25.00	250.00	0.00	25.00	1.000000
<b>Tot</b>	<b>1250.00</b>	<b>250.00</b>	<b>1000.00</b>		<b>Tot</b>	<b>1209.88</b>	<b>209.88</b>	<b>1000.00</b>		<b>250.00</b>	
<b>V.A.</b>	<b>1000.00</b>	<b>207.53</b>	<b>792.47</b>		<b>V.A.</b>	<b>1000.00</b>	<b>178.57</b>	<b>821.43</b>		<b>214.29</b>	
<b>Mont</b>	<b>1464.10</b>	<b>303.85</b>	<b>1160.25</b>		<b>Mont</b>	<b>1400.00</b>	<b>250.00</b>	<b>1150.00</b>		<b>300.00</b>	

Tempi	Rata	Inter	Capit	Residuo	Tempi	Rata	Inter	Capit	Residuo	Inter	Coeff
0				1000.00	0				1000.00		
1	315.47	100.00	215.47	784.53	1	304.35	76.92	227.42	772.58	100.00	0.769231
2	315.47	78.45	237.02	547.51	2	304.35	64.38	239.97	532.61	77.26	0.833333
3	315.47	54.75	260.72	286.79	3	304.35	48.42	255.93	276.68	53.26	0.909091
4	315.47	28.68	286.79	0.00	4	304.35	27.67	276.68	0.00	27.67	1.000000
<b>Tot</b>	<b>1261.88</b>	<b>261.88</b>	<b>1000.00</b>		<b>Tot</b>	<b>1217.39</b>	<b>217.39</b>	<b>1000.00</b>		<b>258.19</b>	
<b>V.A.</b>	<b>1000.00</b>	<b>216.47</b>	<b>783.53</b>		<b>V.A.</b>	<b>1000.00</b>	<b>184.42</b>	<b>815.58</b>		<b>220.69</b>	
<b>Mont</b>	<b>1464.10</b>	<b>316.93</b>	<b>1147.17</b>		<b>Mont</b>	<b>1400.00</b>	<b>258.19</b>	<b>1141.81</b>		<b>308.96</b>	

# Riferimenti – Sito: [www.attuariale.eu](http://www.attuariale.eu)



## SOFTWARE A DISPOSIZIONE

### Operazione Finanziarie di Base

- Tassi Equivalenti
- Valori Attuali e Montanti
- Ammortamento Classico (con Anatocismo)

### Anatocismo nei Mutui

- Ammortamento senza Anatocismo
- Ammortamento (dopo Rinegoziazione)
- Ammortamento a tassi variabili

### Calcolo Tassi

- Calcoli TAN, TAE, TANG e TAEG

### Leasing

- Leasing - Posticipato o alla Tedesca

### Usura nei Mutui

- Presenza di usura Pattizia in un mutuo
- Presenza di usura Sopravvenuta in un mutuo

### Anatocismo nei CC Bancari

- Anatocismo nei Conti Correnti Bancari

### IAS 19 - TFR

- Valutazione attuariale Ias 19

### Pensioni

- Simulatore Pensione Contributiva

### Derivati

- Valutazione Derivati

## CONTATTI

Telefono: 06 88327266

Cellulare: 328 0340579

Email: [attuariale.eu@gmail.com](mailto:attuariale.eu@gmail.com)

Email: [attuariale@mutuocanatocismo.it](mailto:attuariale@mutuocanatocismo.it)

PEC: [antonio.annibali@leggalmail.it](mailto:antonio.annibali@leggalmail.it)

## CHI SIAMO | I NOSTRI OBIETTIVI

2 / 5

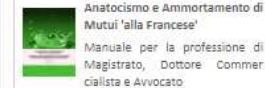
**Attuariale.eu** nasce dalle esperienze di ricerca, didattica e consulenza in campo finanziario, attuariale, aziendale e bancario, realizzate anche con strumenti informatici, maturate dal prof. Antonio Annibali (docente di Matematica Finanziaria presso l'Università degli studi "La Sapienza" di Roma e attuario professionista) e dal suo team.

**Attuariale.eu** si rivolge principalmente a professionisti nelle discipline finanziario-attuariali, tecnico-commerciali e legali (CTU, CTP, dottori commercialisti e avvocati), e anche a singoli utenti privati, che abbiano rapporti con istituti di credito e previdenziali, fornendo un servizio consulenziale di tipo professionale.

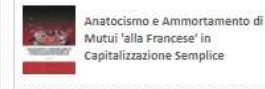


Fornire valutazioni di natura tecnico-finanziaria comporta l'utilizzo di strumenti informatici e spiccata capacità di trattamento e analisi di dati, con utilizzo di modelli matematici necessari per le simulazioni numeriche. La sfida di **Attuariale.eu** è quella di elevare il livello di formazione dei consulenti tecnico-finanziari, offrendo esperienza scientifico-consulenziale e formazione professionale, attraverso il supporto di pubblicazioni e di software di facile comprensione e utilizzazione, grazie all'esperienza didattica maturata negli anni dai componenti del gruppo di lavoro.

## LIBRI e PUBBLICAZIONI



Anatocismo e Ammortamento di Mutui 'alla Francese'  
Manuale per la professione di Magistrato, Dottore Commercialista e Avvocato

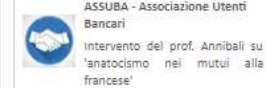


Anatocismo e Ammortamento di Mutui 'alla Francese' in Capitalizzazione Semplice

## SCHEDE di APPROFONDIMENTO

- Anatocismo nei Mutui
- Anatocismo nei Conti Correnti
- Capitalizzazione Semplice
- Usura nei Mutui
- Tassi Usura Mutui

## EVENTI e PARTECIPAZIONI



ASSUBA - Associazione Utenti Bancari  
Intervento del prof. Annibali su 'anatocismo nei mutui alla francese'



ODCEC Napoli - Ordine dei Dottori Commercialisti e degli Esperti Contabili  
Intervento del prof. Annibali'

[Altri interventi >>>](#)